Introducción a las probabilidades
Tarea I
(10 %)

Instrucciones

La tarea se puede entregar por equipos de hasta dos personas, sin excepción, y debe ser entregada a más tardar el día del examen, a la hora de clase.

Reglas de presentación.

- Imprimir este enunciado y rellenar los espacios apropiados.
- Respetar el orden de los ejercicios
- Responder en los espacios correspondientes; intercalar hojas si es necesario.
- Escribir con letra legible.
- Usar hojas limpias, escritas por un sólo lado.
- No incluir las hojas con preguntas sin respuesta.
- Engrapar la tarea en la esquina superior izquierda.

Cada violación de una regla de presentación incurrirá en una penalización de un punto sobre la nota del ejercicio.

Las entregas tardías se recibirán con una penalización acumulada del 20 % de la nota por día hábil de retraso; luego de cuatro días tarde, no vale la pena que entreguen.

Evaluación

Todas las respuestas deben estar apropiadamente explicadas y desarrolladas.

Se seleccionará, mediante sorteo público, el día del examen, un ejercicio para ser corregido. Serán elegibles todos los ejercicios que no hayan salido en el examen.

Solamente se corregirá ese ejercicio y se le asignará una nota sobre 10 puntos.

La nota de la tarea será la nota del ejercicio, luego de aplicar las penalizaciones pertinentes, multiplicada por la fracción de los ejercicios donde exista un intento razonable de resolverlos.

Nos reservamos el derecho a penalizar severamente los casos donde se presenten inconsistencias entre la solución presentada en la tarea y la solución al ejercicio correspondiente en el examen.

Declaración

Marque con una × las cajas correspondientes a los ejercicios entregados:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total

Los abajo firmantes declaramos entender a cabalidad las reglas de presentación de la tarea, la evaluación de la misma y los ejercicios aqui entregados.

Nombre:
Carné:
Firma:

Nombre:
Carné:
Firma:

Ejercicios

1. Se escoge un punto D en el segmento $\overline{AB}$, cuyo punto medio es C y cuya longitud es L. Si X, la distancia de D a A, es una variable aleatoria que tiene densidad uniforme en $(0, L)$ ¿cuál es la probabilidad de que tres segmentos con longitudes iguales a las de los segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ puedan formar un triángulo?
   Sugerencia: recordar que para que tres segmentos puedan formar un triángulo, es necesario y suficiente que la suma de las longitudes de dos cualesquiera de ellos, sea mayor que la longitud del tercer segmento.

2. Si se toman cuatro de las siete letras de la palabra **bananas** para formar una palabra de cuatro letras, calcule el número de maneras en que se puede hacer si:
   a) Las palabras deben llevar la letra **s**.
   b) Tienen que empezar con la **b** y terminar en vocal.
   c) Inician con la **b** y se incluye la **n**.
   d) Contienen dos vocales.

3. Cada una de cuatro bolas indistinguibles se colocan al azar en uno de tres tazones indistinguibles.

   a) Encuentre la distribución de probabilidad para $Y =$ el número de tazones con exactamente una bola.

   b) Encuentre la media y la desviación estándar para Y.

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que Y sea al menos 3?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que Y sea al menos 1 dado que Y es a lo sumo 1?

4. Una urna contiene 2 bolas rojas, 2 bolas verdes, 2 bolas azules y 2 bolas blancas, indistinguibles salvo por su color. Se extraen al azar 3 bolas a la vez y se observan sus colores.
   a) ¿Cuantos resultados posibles tiene el experimento?
   b) ¿Es el espacio equiprobable?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las bolas extraídas sean de colores distintos?
   d) ¿Son los eventos *al menos una bola es roja* y *a lo sumo una bola es blanca* independientes?
   e) ¿Son los eventos *hay un número impar de bolas rojas* y *hay un número par de bolas que no son rojas* independientes?

5. Dado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad; A, B y C eventos en este espacio. Demuestre o de un contra-ejemplo en cada caso:
   a) A y $\Omega \setminus A$ siempre son independientes.
   b) Si los eventos A y B son independientes y los eventos A y C son independientes entonces los eventos B y C son independientes.
   c) Si A y B son eventos independientes; ambos con probabilidad estrictamente menor que uno y $C = A \cap B$ tiene probabilidad positiva entonces A y C no son independientes.

6. Una variable aleatoria discreta con rango contenido en los naturales tiene la propiedad de *perdida de la memoria* si para todos los valores naturales de s y t se cumple que $\mathbb{P}(X > t + s | X \geq s) = \mathbb{P}(X > t)$.

   Se lanza un dado justo repetidas veces hasta obtener, por primera vez, dos resultados iguales seguidos. Sea X éste número de lanzamientos.

   a) ¿Si una variable aleatoria Z tiene perdida de la memoria, entonces los eventos $Z > t + s$ y $Z > t$ son independientes?

   b) ¿Cuál es el rango de X?

   c) ¿Cuál es la función de probabilidad para X?

   d) ¿Tiene X perdida de la memoria?

   e) ¿Tiene $Y = X - 1$ perdida de la memoria?

7. En el *dominó doble-n* se utilizan los números naturales desde el 0 hasta el n para marcar alguno de los dos extremos de cada pieza. Hay piezas de dos tipos, los *dobles*, que tienen el mismo número en ambos extremos y las piezas normales, que tienen números distintos en cada extremo. El dominó comúnmente jugado en Venezuela es el dominó doble-6.
   Una mano de dominó doble-n consiste de $n+1$ piezas seleccionadas al azar de una pila con todas las piezas. Un juego de dominó doble-n siempre se juega entre cuatro personas, a quienes se reparte su mano al azar, dejando las piezas sobrantes en una pila. Las personas se agrupan en dos equipos de dos personas.
   a) ¿Cuántas piezas tiene el dominó doble-n?
   b) ¿Cuál es el valor de n más pequeño para el cual se puede jugar un juego de dominó doble-n?
   c) ¿Cuantas manos distintas se le pueden repartir a un jugador de dominó doble-n?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener todos los dobles en una mano?
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos jugadores de un mismo equipo tengan todos los dobles.

8. Una condición médica ocurre en el 0,1 % de la población. Existe una prueba barata en el mercado que reporta un 0,2 % de falsos negativos y un 10 % de falsos positivos. Aplicaciones distintas de la prueba se pueden considerar independientes.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que sale positivo en la prueba efectivamente sufra la condición?
   b) Un hipocondríaco toma la prueba dos veces.
   ¿Cuál es la probabilidad de que realmente sufra de la condición si una de las dos pruebas da positiva y la otra da negativa?
   c) Si dos personas toman la prueba y ambos salen positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sufran la condición?

9. Una planta industrial procesa jugo de frutas. La demanda de jugo X en cierto período es aleatoria con densidad $f(x) = 3x^2$ para $0 < x < 1$. Donde x es el volumen de jugo, en *miles de metros cúbicos.* La gerencia debe decidir que cantidad Q producirá para satisfacer la demanda en el próximo período. Esta cantidad no debe ser excesiva, ya que todo lo que no se venda representará una pérdida y tampoco debe ser muy pequeña, ya que dejarían de percibirse beneficios potenciales. En todo caso, Q no debe ser menor que 0 (valor mínimo de la demanda) ni mayor que 1 (valor máximo de la demanda). La empresa tiene un beneficio neto de BsF. 16000 por *metro cúbico* vendido, y una pérdida neta de BsF. 9000 por *metro cúbico* producido que se quede sin vender. ¿Qué cantidad Q se ha de producir si se desea maximizar la esperanza matemática del beneficio?

10. Un lote de producción consta de 5000 artículos, 25 de los cuales son defectuosos. Un inspector toma uno de los artículos al azar y si no es defectuoso lo devuelve al lote. Sea N el número de inspecciones de objetos no defectuosos que se realizan antes de encontrar el primer objeto defectuoso.
   a) Calcule $\mathbb{P}(10 \leq N \leq 30)$.
   b) El lote completo será rechazado y generará perdidas si $N < 10$ ya que en ese caso el inspector niega el permiso de venta. Si $10 \leq N \leq 30$ el lote obtendrá los permisos básicos de venta y el precio de cada artículo será BsF. 150. Si $N > 30$ se supone que el lote pasa todas las regulaciones y estándares de calidad y el producto se puede vender, con el sello Premium, a BsF. 200 cada uno.
   Suponiendo que el costo de producir cada artículo es BsF. 100.
   c) ¿Cuál es la probabilidad de el lote genere pérdidas?
   d) Calcule la ganancia esperada para el lote.